Chapitre 1

Système thermodynamique et premier principe

1.1 Fonction d'état : mathématique

Soit la fonction $f(x,y) = y\exp(ax) + xy + bx\ln y$ où a et b sont des constantes.

1) Déterminer $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ et $df(x,y)$.

2) Déterminer $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$.

$\boxed{1.1}$ **Solution**

Les dérivées partielles et la différentielle de la fonction $f(x,y) = y\exp(ax) + xy + bx\ln y$ s'écrivent,

1) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = ay\exp(ax) + y + b\ln y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \exp(ax) + x + \frac{bx}{y}$$

$$df(x,y) = (ay\exp(ax) + y + b\ln y)\,dx + \left(\exp(ax) + x + \frac{bx}{y}\right)dy$$

2) $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = a\exp(ax) + 1 + \frac{b}{y}$$

1.2 Fonction d'état : gaz parfait

Un gaz parfait est caractérisé par la relation $pV = NRT$ où p est la pression du gaz, V son volume, T sa température, N le nombre de moles de gaz et R est une constante.

1) Déterminer la différentielle $dp(T,V)$.

2) Déterminer $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial p\,(T,V)}{\partial V}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial V}\left(\dfrac{\partial p\,(T,V)}{\partial T}\right)$.

$\boxed{1.2}$ **Solution**

La différentielle et les dérivées partielles de la pression $p\,(T,V)$ d'un gaz parfait s'écrivent,

1) $dp\,(T,V) = \dfrac{NR}{V}\,dT - \dfrac{NRT}{V^2}\,dV$.
2) $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial p\,(T,V)}{\partial V}\right) = \dfrac{\partial}{\partial V}\left(\dfrac{\partial p\,(T,V)}{\partial T}\right) = -\,\dfrac{NR}{V^2}$.

1.3 Fonction d'état : élastique

Un élastique de longueur L est une fonction connue $L\,(T,F)$ de sa température T et des forces de norme F exercées sur ses extrémités afin de l'étirer. L'étirement de l'élastique est caractérisé par deux propriétés physiques :

1) le module de Young, défini comme $E = \dfrac{L}{A}\left(\dfrac{\partial L}{\partial F}\right)^{-1}$, où A est l'aire de la section de l'élastique.
2) le coefficient d'expansion thermique $\alpha_L = \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L}{\partial T}$.

Déterminer la variation de longueur ΔL de l'élastique pour une variation ΔT sa température et une variation ΔF des forces appliquées. Supposer que $\Delta T \ll T$ et $\Delta F \ll F$. Exprimer ΔL en termes de E et α_L.

$\boxed{1.3}$ **Solution**

A l'aide de la définition (1.7) de la différentielle de la longueur $L\,(T,F)$ de l'élastique, la variation de longueur de l'élastique s'écrit,

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial T}\,\Delta T + \frac{\partial L}{\partial F}\,\Delta F$$

et peut être mise sous la forme,

$$\Delta L = L\left(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial T}\right)\Delta T + \frac{L}{A}\left(\frac{L}{A}\left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)^{-1}\right)^{-1}\Delta F$$

En utilisant les deux propriétés physiques de l'élastique, on obtient l'expression suivante pour la variation de longueur de l'élastique,

$$\Delta L = L\alpha_L\,\Delta T + \frac{L}{AE}\,\Delta F$$

1.4 Fonction d'état : volume

Un récipient de forme conique avec un angle d'ouverture α autour de l'axe vertical est rempli de liquide (fig. 1.1). Le liquide entre dans le cône à vitesse $v(t) = kt$, où k est une constante, par un trou circulaire de diamètre d situé à sa base. Lorsque la surface du liquide est à hauteur $h(t)$, le volume est $V(t) = \dfrac{1}{3}\pi \tan^2\alpha\, h^3(t)$. Initialement, au temps $t = 0$, la hauteur est $h(0) = 0$. Déterminer l'expression du taux de variation de volume $\dot{V}(t)$ et en déduire $h(t)$.

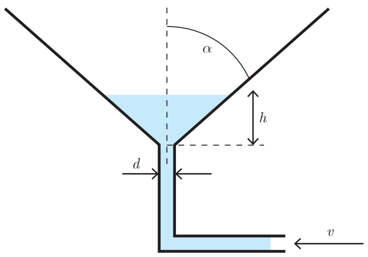

Fig. 1.1 Un liquide pénètre dans un entonnoir avec un flux laminaire de vitesse v dans un tube de diamètre d. L'entonnoir est un cône d'angle d'ouverture α. L'axe du cône est vertical.

$\boxed{1.4}$ Solution

Le taux de variation du volume de liquide est obtenu en prenant la dérivée temporelle du volume $V(t) = \dfrac{1}{3}\pi \tan^2\alpha\, h^3(t)$,

$$\dot{V}(t) = \pi\, \tan^2\alpha\, h^2(t)\; \dot{h}(t)$$

où l'angle α est constant. Le taux de variation de volume du flux de liquide entrant est exprimé comme,

$$\dot{V}(t) = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v(t) = \pi\,\frac{kd^2}{4}\, t$$

En identifiant ces deux expressions de $\dot{V}(t)$, on obtient,

$$\tan^2\alpha\, h^2(t)\; \dot{h}(t) = \frac{kd^2}{4}\, t$$

qui peut mis sous la forme suivante,

$$h^2(t)\; dh(t) = \frac{kd^2}{4\,\tan^2\alpha}\, t\, dt$$

L'intégrale de cette équation s'écrit,

$$\int_{h(0)}^{h(t)} h'^2(t')\; dh'(t') = \frac{kd^2}{4\,\tan^2\alpha} \int_0^t t'\, dt'$$

Le résultat de cette intégrale est,

$$\frac{1}{3}\,h^3\left(t\right)=\frac{kd^2}{4\,\tan^2\alpha}\,\frac{1}{2}\,t^2$$

Ainsi, la hauteur de liquide dans le cône est,

$$h\left(t\right)=\left(\frac{3\,kd^2}{8\tan^2\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}$$

1.5 Identité cyclique de dérivées partielles : gaz parfait

Un gaz parfait est caractérisé par la relation $p\,V=NRT$ (sect. 1.2) où la pression $p\left(T,V\right)$ est une fonction de T et V, la température $T\left(p,V\right)$ est une fonction de p et V et le volume $V\left(T,p\right)$ est une fonction de T et p. Déterminer,

$$\frac{\partial p\left(T,V\right)}{\partial T}\,\frac{\partial T\left(p,V\right)}{\partial V}\,\frac{\partial V\left(T,p\right)}{\partial p}$$

$\boxed{1.5}$ **Solution**

La dérivée partielle de la pression, de la température et du volume d'un gaz parfait qui satisfait la relation $p\,V=NRT$ s'écrivent,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p\left(T,V\right)}{\partial T}&=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{NRT}{V}\right)=\frac{NR}{V}\\
\frac{\partial T\left(p,V\right)}{\partial V}&=\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{p\,V}{NR}\right)=\frac{p}{NR}\\
\frac{\partial V\left(T,p\right)}{\partial p}&=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{NRT}{p}\right)=-\,\frac{NR}{p^2}=-\,\frac{V}{p}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial p\left(T,V\right)}{\partial T}\,\frac{\partial T\left(p,V\right)}{\partial V}\,\frac{\partial V\left(T,p\right)}{\partial p}=-\,1$$

Ce résultat peut être généralisé (sect. 4.7.2).

1.6 Homme sur un bateau

Un homme se déplace sur le pont horizontal d'un bateau. Initialement, l'homme et le bateau sont immobiles par rapport à l'eau. L'homme se déplace ensuite sur le pont, puis s'arrête.

1) En absence de frottement entre le bateau et l'eau, décrire le mouvement du bateau lorsque l'homme s'arrête.
2) En présence de frottement entre le bateau et l'eau, décrire le mouvement du bateau lorsque l'homme s'arrête.

1.6 Solution

1) La quantité de mouvement totale $\boldsymbol{P}$ est la somme des quantités de mouvement du bateau $\boldsymbol{P}_B$ et de l'homme par rapport à l'eau $\boldsymbol{P}_H$ qui coïncide avec le référentiel du centre de masse du système. En l'absence de frottement, la résultante des forces appliquées au système est nulle et la quantité de mouvement est conservée. En effet, le théorème du centre de masse (1.13) implique que,

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = \textbf{cste}$$

Initialement, toutes les quantités de mouvement sont nulles. Par conservation, la quantité de mouvement totale est constante. Par conséquent, lorsque l'homme s'arrête sa quantité de mouvement est nulle, ce qui implique que la quantité de mouvement du bateau est nulle également. Par conséquent, le bateau est alors immobile par rapport à l'eau.

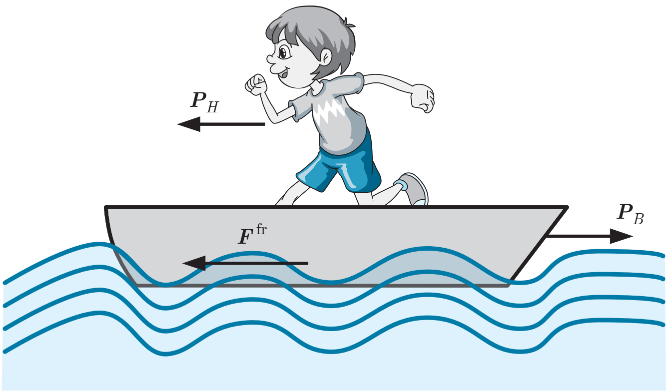

Fig. 1.2 Un homme se déplace avec une quantité de mouvement $\boldsymbol{P}_H$ sur le pont horizontal d'un bateau qui se déplace avec une quantité de mouvement $\boldsymbol{P}_B$. L'eau exerce une force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}^{\,\text{fr}}$ qui s'oppose au mouvement du bateau.

2) Durant le déplacement de l'homme sur le bateau, celui-ci se déplace dans la direction opposée. Le bateau subit une force de frottement visqueuse $\boldsymbol{F}^{\,\text{fr}}$ opposée à son déplacement et donc dirigée dans le sens du déplacement de l'homme (fig. 1.2). D'après le théorème du centre de masse (1.13), l'action de la force de frottement modifie la quantité de mouvement totale du système,

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F}^{\,\text{fr}} \neq \boldsymbol{0}$$

Ainsi, lorsque l'homme s'arrête, la quantité de mouvement du système totale est positive dans le sens de la force de frottement et donc du déplacement de l'homme. Ainsi l'homme est immobile par rapport au bateau qui se déplace dans le sens de la force de frottement. Toutefois, la norme de la quantité de mouvement diminue à cause de la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}^{\,\text{fr}} = -\,\lambda\,\boldsymbol{v}$.

1.7 Choc mou

On considère un choc mou entre deux objets qui restent accrochés après le choc. On peut montrer que la variation d'énergie cinétique est maximale pour un tel choc. On considère que les deux objets sont des points matériels de M_1 et M_2 qui forment un système isolé. Le point matériel de masse M_1 a une quantité de mouvement initiale $\boldsymbol{P}_1$ et le point matériel de masse M_2 est initialement au repos. Les variables d'état sont la quantité de mouvement et une variable extensive X_0 associée à une propriété interne du système (i.e. l'entropie S comme on le verra au chapitre suivant).

Soit $E_i\left(\boldsymbol{P}, X_0\right)$ l'énergie et $U_i\left(X_0\right)$ l'énergie interne juste avant le choc. Soit $E_f\left(\boldsymbol{P}, X_0\right)$ l'énergie et $U_f\left(X_0\right)$ l'énergie interne juste après le choc. En utilisant les lois de conservation de l'énergie (1.9) et de la quantité de mouvement (1.12), déterminer la variation d'énergie interne du système $\Delta U \equiv U_f\left(X_0\right) - U_i\left(X_0\right)$.

1.7 Solution

D'après la loi de conservation (1.12) du premier principe pour un système isolé, la quantité de mouvement $\boldsymbol{P}$ est une constante. L'énergie du système avant et après le choc s'écrit,

$$\begin{aligned} E_i\left(\boldsymbol{P}, X_0\right) &= \frac{\boldsymbol{P}_1^2}{2\,M_1} + U_i\left(X_0\right) \\ E_f\left(\boldsymbol{P}, X_0\right) &= \frac{\boldsymbol{P}_1^2}{2\left(M_1 + M_2\right)} + U_f\left(X_0\right) \end{aligned}$$

D'après la loi conservation (1.9) du premier principe pour un système isolé, l'énergie $E\left(\boldsymbol{P}, X_0\right)$ est aussi une constante, i.e. $E_i\left(\boldsymbol{P}, X_0\right) = E_f\left(\boldsymbol{P}, X_0\right)$. On peut donc écrire,

$$\frac{\boldsymbol{P}_1^2}{2\,M_1} + U_i\left(X_0\right) = \frac{\boldsymbol{P}_1^2}{2\,\left(M_1 + M_2\right)} + U_f\left(X_0\right)$$

Ainsi,

$$\Delta U = U_f\left(X_0\right) - U_i\left(X_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_1 + M_2}\right)\boldsymbol{P}_1^2 > 0$$

En conclusion, l'énergie interne d'un système isolé augmente lors d'un choc mou afin de compenser la perte d'énergie cinétique.

1.8 Evolution de la concentration de sel

Un bassin contient $N_s\left(t\right)$ moles de sel dissoutes dans $N_e\left(t\right)$ moles d'eau. Le bassin reçoit de l'eau douce avec un débit entrant constant I_e^{in}. On suppose que l'eau est complètement brassée dans le bassin de sorte que la concentration de sel peut être considérée comme homogène. L'eau salée sort du bassin avec un débit constant $I_{es}^{\text{out}} = I_s^{\text{out}}(t) + I_e^{\text{out}}(t)$, où $I_s^{\text{out}}(t)$ et $I_e^{\text{out}}(t)$ sont les débits sortants de sel et d'eau salée. Déterminer la concentration de sel,

$$c_s(t) = \frac{N_s(t)}{N_s(t) + N_e(t)}$$

comme fonction du temps t compte tenu des conditions initiales $N_s(0)$ et $N_e(0)$.

$\boxed{1.8}$ Solution

La dérivée temporelle du nombre de moles de sel dans le bassin est égale au débit sortant de sel et la dérivée temporelle du nombre de moles d'eau est la somme des débit d'eau sortant et entrant,

$$\begin{aligned}\dot{N}_s(t) &= I_s^{\text{out}}(t)\\ \dot{N}_e(t) &= I_e^{\text{in}} + I_e^{\text{out}}(t)\end{aligned}$$

où I_e^{in} est le débit entrant d'eau douce (positif), et I_s^{out} et I_e^{out} sont les débits sortant de sel et d'eau (négatifs). Comme un débit est une grandeur extensive, le débit sortant d'eau salée I_{es}^{out} est la somme des débits sortants de sel $I_s^{\text{out}}(t)$ et d'eau $I_e^{\text{out}}(t)$,

$$I_{es}^{\text{out}} = I_s^{\text{out}}(t) + I_e^{\text{out}}(t)$$

On suppose que l'eau et le sel sont complètement mélangés dans le bassin de sorte que la concentration de sel peut être considérée comme homogène. Ainsi, le débit sortant de sel $I_s^{\text{out}}(t)$ est égale au produit de sa concentration molaire $c_s(t)$ dans le bassin et du débit sortant d'eau salée I_{es}^{out},

$$I_s^{\text{out}}(t) = c_s(t)\; I_{es}^{\text{out}}$$

En substituant cette équation pour $I_s^{\text{out}}(t)$ dans l'équation de bilan pour le sel dans le bassin, en utilisant la définition de la concentration molaire,

$$c_s(t) = \frac{N_s(t)}{N_s(t) + N_e(t)}$$

et en divisant le résultat par $N_s(t)$, on obtient,

$$\frac{\dot{N}_s(t)}{N_s(t)} = \frac{I_{es}^{\text{out}}}{N_s(t) + N_e(t)}$$

En sommant les deux premières équations de bilan, on obtient l'équation de bilan pour l'eau salée dans le bassin,

$$\dot{N}_s(t) + \dot{N}_e(t) = I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}$$

Comme le terme dans le membre de droite de cette équation est constant, on peut l'intégrer par rapport au temps de $t = 0$ à t,

$$N_s(t) + N_e(t) = \left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t + N_s(0) + N_e(0)$$

En substituant ce résultat dans l'équation pour $\dot{N}_s(t)/N_s(t)$, on obtient,

$$\frac{\dot{N}_s(t)}{N_s(t)} = \frac{I_{es}^{\mathrm{out}}}{\left(I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}\right) t + N_s(0) + N_e(0)}$$

Le résultat de l'intégration par rapport au temps de cette équation s'écrit,

$$\ln\left(\frac{N_s(t)}{N_s(0)}\right) = \frac{I_{es}^{\mathrm{out}}}{I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}} \ln\left(\frac{\left(I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}\right) t + N_s(0) + N_e(0)}{N_s(0) + N_e(0)}\right)$$

En prenant l'exponentielle de ce résultat, on obtient,

$$N_s(t) = N_s(0)\left(1 + \frac{\left(I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)^{\frac{I_{es}^{\mathrm{out}}}{I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}}}$$

En substituant les relations pour $N_s(t)$ et $N_s(t) + N_e(t)$ dans l'expression concentration molaire de sel $c_s(t)$, on obtient,

$$c_s(t) = \frac{N_s(0)}{\left(I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}\right) t + N_s(0) + N_e(0)}\left(1 + \frac{\left(I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)^{\frac{I_{es}^{\mathrm{out}}}{I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}}}$$

Ce résultat peut être mis sous la forme suivante (fig. 1.3),

$$c_s(t) = \frac{N_s(0)}{N_s(0) + N_e(0)}\left(1 + \frac{\left(I_e^{\mathrm{in}} + I_{es}^{\mathrm{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)^{-\frac{1}{1 + I_{es}^{\mathrm{out}}/I_e^{\mathrm{in}}}}$$

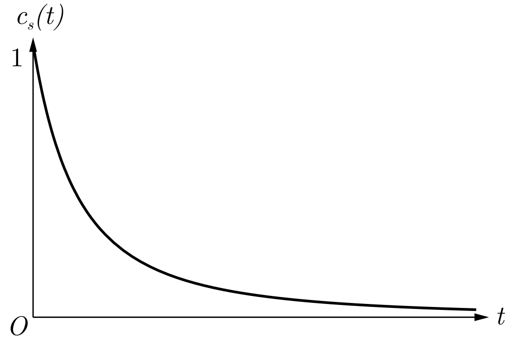

Fig. 1.3 La cencentration de sel $c_s(t)$ dans l'eau salée du bassin est une fonction décroissante du temps qui tend asymptotiquement vers 0.

1.9 Capillarité : angle de contact

Pour tenir compte des effets de capillarité, on considère que l'énergie d'un système contient des contributions qui sont proportionnelles aux aires des interfaces entre les différentes parties du système. Pour une goutte de liquide mouillant une surface horizontale (fig. 1.4), on suppose que le liquide à une forme de calotte sphérique. Alors, l'énergie interne est exprimée comme $U(h,R) = (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\,\pi a^2 + \gamma_{\ell g}\,A$ où $a = R\sin\theta = \sqrt{2Rh - h^2}$ est le rayon et $A = 2\pi Rh$ est l'aire latérale de la calotte sphérique de liquide de hauteur h obtenue en tronquant la sphère de rayon R avec la surface horizontale du substrat solide. Les paramètres $\gamma_{s\ell}$, γ_{sg}, $\gamma_{\ell g}$ caractérisent les substances et sont indépendants de la forme de la goutte. Montrer que l'angle de contact θ est donné par,

$$(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + \gamma_{\ell g}\cos\theta = 0$$

en minimisant l'énergie interne $U(h,R)$ compte tenu de la condition que le volume $V(h,R) = \frac{\pi}{3}\,h^2\,(3R - h) = V_0$ de la calotte sphérique de liquide est constant.

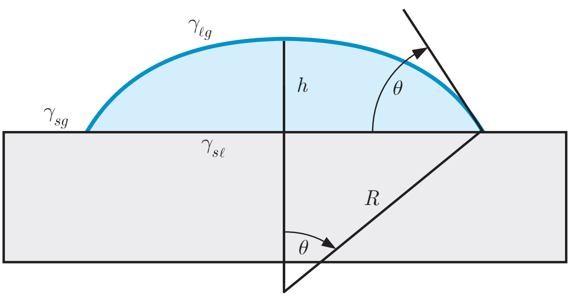

Fig. 1.4 Une goutte de liquide sur un substrat horizontal a une forme de calotte sphérique. L'angle θ est appelé angle de contact. Une tension superficielle est définie pour les trois interfaces : solide-liquide ($\gamma_{s\ell}$), solide-gaz (γ_{sg}) et liquide-gaz ($\gamma_{\ell g}$).

1.9 Solution

Afin de minimiser l'énergie interne $U(h,R)$, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour imposer la condition du volume fixé de la goutte, i.e. $V(h,R) = V_0$. La fonction $F(h,R,\lambda)$ à minimiser est,

$$\begin{aligned} F(h,R,\lambda) &= U(h,R) - \lambda\Big(V(h,R) - V_0\Big) \\ &= (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\,\pi\left(2Rh - h^2\right) + \gamma_{\ell g}\,2\pi Rh \\ &\quad - \lambda\left(\frac{\pi}{3}\,h^2\,(3R - h) - V_0\right) \end{aligned}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. D'après cette méthode, la dérivée partielle de la fonction $F(h,R,\lambda)$ par rapport à h doit s'annuler,

$$\frac{\partial F}{\partial h} = (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\,2\pi\,(R - h) - \gamma_{\ell g}\,2\pi R + \lambda\pi\left(2Rh - h^2\right) = 0$$

ce qui donne une expression pour le multiplicateur de Lagrange,

$$\lambda = \left(\frac{2}{2Rh - h^2}\right)(R - h)\left(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}\right) + \left(\frac{2}{2Rh - h^2}\right) R\,\gamma_{\ell g}$$

La dérivée partielle de la fonction $F(h, R, \lambda)$ par rapport à R doit s'annuler également,

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \left(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}\right) 2\pi h + \gamma_{\ell g}\, 2\pi h - \lambda \pi h^2 = 0$$

ce qui donne une autre expression pour le multiplicateur de Lagrange,

$$\lambda = \frac{2}{h}\left(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}\right) + \frac{2}{h}\,\gamma_{\ell g}$$

En identifiant les deux expressions pour le multiplicateur de Lagrange λ, on obtient,

$$(R - h)\left(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}\right) + R\,\gamma_{\ell g} = (2R - h)\left(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}\right) + (2R - h)\,\gamma_{\ell g}$$

qui peut être mis sous la forme suivante,

$$\left(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}\right) + \left(\frac{R - h}{R}\right)\gamma_{\ell g} = 0$$

Par inspection graphique (fig. 1.4),

$$\cos\theta = \frac{R - h}{R}$$

Ainsi, on obtient la condition suivante,

$$\left(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}\right) + \gamma_{\ell g}\,\cos\theta = 0$$

1.10 Energie : thermodynamique et mécanique

Un poids de masse M est suspendue à un fil. La force $\boldsymbol{F}$ exercée sur le fil est telle que le poids descend verticalement avec une vitesse $\boldsymbol{v}$ qui peut varier au cours du temps.

1) Déterminer l'évolution temporelle de l'énergie mécanique E' qui est la somme des énergies cinétiques et potentielles.
2) Déterminer l'évolution temporelle de l'énergie E du système d'après le premier principe de de la thermodynamique (1.11).

$\boxed{1.10}$ **Solution**

1) Du point de vue de la mécanique, la projection de l'équation du mouvement de Newton pour le poids, $\boldsymbol{F} + M\,\boldsymbol{g} = M\,\boldsymbol{a}$, le long de l'axe de coordonnée Oz orienté vers le bas s'écrit,

$$-F + M\,g = M\ddot{z}$$

L'évolution temporelle de l'énergie mécanique E' est obtenue en multipliant ce résultat par $\dot{z}$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,M\dot{z}^2 -\ Mgz\right) = -\,F\dot{z}$$

Comme l'énergie mécanique E' est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$E' = \frac{1}{2}\,M\dot{z}^2 -\ Mgz$$

le résultat précédent peut être mis sous la forme suivante,

$$\dot{E}' = -\,F\dot{z}$$

2) Du point de vue de la thermodynamique, l'énergie E du système est exprimée comme,

$$E = \frac{1}{2}\,M\dot{z}^2 + U$$

où U est l'énergie interne du système. Comme le système est constitué de la masse M seulement, son poids est une force extérieure. Ainsi, l'énergie potentielle gravitationnelle n'est pas inclue dans l'énergie E du système. Vu que l'énergie interne U est une fonction des variables d'état du système uniquement, elle est indépendante de la hauteur z dans le champ gravitationnel terrestre. Comme il n'y a pas de transfert de chaleur entre le poids et l'environnement, la puissance thermique s'annule, i.e. $P_Q = 0$. De plus, on suppose que le poids est indéformable, ce qui implique que la puissance mécanique de déformation s'annule également, i.e. $P_W = 0$. La puissance extérieure est due au poids $M\,\boldsymbol{g}$ et à la force $\boldsymbol{F}$ qui peut modifier l'énergie cinétique du système,

$$P^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} + M\,\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} = -\,F\dot{z} + Mg\dot{z}$$

Le premier principe s'écrit, $\dot{E} = P^{\,\text{ext}}$, ce qui implique que,

$$\dot{E} = (-\,F + Mg)\,\dot{z}$$

Vu que l'énergie interne de ce système est constante, i.e. $\dot{U} = 0$, le résultat précédent se réduit à,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,M\dot{z}^2\right) = (-\,F + Mg)\,\dot{z}$$

1.11 Oscillateur harmonique amorti

Un oscillateur harmonique de masse M et de constante élastique k est soumis à une force de frottement $\boldsymbol{F}_f(t) = -\lambda\,\boldsymbol{v}(t)$ où $\boldsymbol{v}(t)$ est la vitesse du point matériel et $\lambda > 0$. En utilisant l'axe de coordonnées Ox où l'origine O correspond à la position du point matériel lorsque l'oscillateur harmonique est au repos, l'équation du mouvement s'écrit,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

où $\omega_0^2 = k/M$ et $\gamma = \lambda/(2M)$. Dans le régime d'amortissement faible, où $\gamma \ll \omega_0$, la position peut être exprimée comme,

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

où C et ϕ sont des constantes d'intégration.

1) Exprimer l'énergie mécanique $E(t)$ en termes des coefficients k, C et γ.
2) Déterminer la puissance $P(t)$ dissipée par la force de frottement $\boldsymbol{F}_f(t)$.

1.11 Solution

1) L'énergie mécanique de l'oscillateur amorti d'un point matériel de masse M et de constante élastique k soumis à une coefficient de frottement γ, où $\gamma \ll \omega_0$ et $\omega_0^2 = k/M$, est la somme de l'énergie cinétique $T(t)$ et de l'énergie potentielle élastique $V_e(t)$ du ressort,

$$E(t) = T(t) + V_e(t) = \frac{1}{2}\,M\,\boldsymbol{v}^2(t) + \frac{1}{2}\,k\,\boldsymbol{r}^2(t)$$

où $\boldsymbol{v}^2(t) = \dot{x}^2(t)$ est la vitesse au carré et $\boldsymbol{r}^2(t) = x^2(t)$ est le déplacement au carré le long de l'axe Ox. La position de repos du point matériel est à l'origine. Ainsi,

$$E(t) = \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}\,k\,x^2(t)$$

Comme la coordonnée de position $x(t)$ s'écrit,

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

on a,

$$x^2(t) = C^2e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t + \phi)$$
$$\dot{x}^2(t) = \omega_0^2\,C^2e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{k}{M}\,C^2e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

Ainsi, l'énergie mécanique s'écrit,

$$E(t) = \frac{1}{2}\,k\,C^2e^{-2\gamma t}\left(\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)\right) = \frac{1}{2}\,k\,C^2e^{-2\gamma t}$$

2) La puissance dissipée par la force de frottement $\boldsymbol{F}_f(t)$ est égale à la dérivée temporelle de l'énergie mécanique,

$$P(t) = \dot{E}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,k\,C^2e^{-2\gamma t}\right) = -\gamma\,k\,C^2e^{-2\gamma t}$$